# Huvudansökan, kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper

# Urvalsprov 8.5.2019 kl. 10.00–13.00

Skriv ditt namn och dina personuppgifter med tryckbokstäver.
Skriv ditt namn med latinska bokstäver (abcd...), inte till exempel med kyrilliska bokstäver (абгд...).
Om du inte har en finländsk personbeteckning, skriver du istället din födelsetid.
Skriv dina personuppgifter på alla provpapper

| | |
|---|---|
| Efternamn | |
| Förnamn (alla) | |
| Personbeteckning | |
| E-postadress | |
| Telefon | |

**Kontrollera med hjälp av sidnumren att du har fått alla sidor.**

Skriv din namnteckning i fältet nedan för att visa att du har kontrollerat ovan nämnda saker.

| | |
|---|---|
| Namnteckning | |

Om du vill att dina provsvar bedöms, lämna det nedanstående fältet tomt.
Om du inte vill att dina provsvar bedöms, skriv följande text i fältet nedan: "*Jag vill inte att mina provsvar bedöms*". I detta fall får du noll poäng i provet.

| | |
|---|---|
| Att avstå från bedömning | |

## Läs noggrant igenom alla anvisningar

- Kontrollera att ditt provkompendium utöver titelbladet och anvisningarna (s. 1–2) innehåller följande sidor:
    - provfrågor och svarsfält (s. 3–8)
    - ett konceptpapper för egna anteckningar.

- Frågor besvaras på pappret med frågor och svarsfält.

- **Kontrollera att du har skrivit ditt namn och din personbeteckning på alla svarsblanketter.**

- Skriv dina provsvar
    - på finska eller svenska. Svar som har skrivits på andra språk bedöms inte.
    - på provkompendiet. Skriv varje svar direkt under frågan. Vid behov kan du fortsätta vilket som helst svar på sid. 8.
    - med blyertspenna och med tydlig handstil. Otydliga anteckningar bedöms enligt det alternativet som ger minst poäng.

- Skriv inte alternativa svar. Om du skriver alternativa svar, beaktas endast det svar som ger minst poäng.

- Du kan planera dina svar och skriva egna anteckningar på konceptpappret. Anteckningarna på konceptpappret beaktas inte i bedömningen. Du har fått ett konceptpappersark. Du kan få mera konceptpapper av övervakaren.

- Placera ditt provmaterial så att deltagare som sitter nära dig inte kan se dina svar och anteckningar.

## Poäng

Urvalsprovet poängsätts på skalan 0–50. Om det ges poäng separat per uppgift, anges detta vid uppgiften.

## Litteraturen till urvalsprovet

Uppgifterna i urvalsprovet baserar sig på gymnasiets långa lärokurs i matematik (9 kurser, enligt Grunderna för gymnasiets läroplan 2015).

## När du vill lämna in ditt prov

Kom ihåg att skriva din namnteckning på provkompendiets titelblad, samt ditt namn på alla sidor där detta begärs. När du går för att lämna in provet, ta med alla dina saker från din plats. Lämna in alla papper, också konceptpappret även om du har lämnat vissa eller alla uppgifter obesvarade. Bevisa din identitet när du lämnar in provpappren. Övervakaren antecknar att du deltagit i provet samt lämnat in provpappren i deltagarlistan. Övervakaren kan ge dig ett separat intyg över att du deltagit i provet om du behöver ett sådant.

## Uppgift 1 (10 poäng)

Lös följande ekvationer och olikheter.

(a) $(x-1)(2-3x) \geq -4$, (2 poäng)
(b) $e^x = 2e^{-x}$, (2 poäng)
(c) $|2x-1| > |x+2|$, (2 poäng)
(d) $\sin(x+\pi) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, (2 poäng)
(e) $\ln x - \ln(x+1) > 1$. (2 poäng)

## Uppgift 2 (10 poäng)

Bestäm konstanten $c$ så att det största värdet till funktionen $f(x) = 2x^3 - 24x + c$ i intervallet $[1,3]$ är 12.

## Uppgift 3 (10 poäng)

Två kordor i en cirkel skär varandra. Skärningspunkten delar cirkelns korda i delar, vars längder är 9 cm och 10 cm, och den andra kordan i proportionen 2:5. Beräkna längden av den senare kordan.

## Uppgift 4 (10 poäng)

Bestäm den integralfunktion $F$, som antar positiva värden, till funktionen $f(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x} + 2$, $x > 0$, för vilken arean av det område som begränsas av integralfunktionens graf, linjerna $x = 1$ och $x = 4$, samt $x$-axeln, är 81.

## Uppgift 5 (10 poäng)

Slumpvariabeln $X$ har en *diskret likformig fördelning* med värdemängden $\{1,2,\ldots,n\}$, om dess frekvensfunktion är $p_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$ för alla $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(a) Härled väntevärdet för den diskreta likformiga fördelningen. (5 poäng)
(b) Ge ett exempel på ett slumpförsök, som följer den diskreta likformiga fördelningen. Ange en slumpvariabel $X$ som lämpar sig för situationen och beräkna dess väntevärde. (5 poäng)

**Helsingin yliopisto**
**Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma**
**Valintakoe 8.5.2019 klo 10.00–13.00 – Ratkaisut ja pisteytys**

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.
   (a) $(x-1)(2-3x) \geqslant -4$, (2 p.)
   (b) $e^x = 2e^{-x}$, (2 p.)
   (c) $|2x-1| > |x+2|$, (2 p.)
   (d) $\sin(x+\pi) = \cos(x+\frac{\pi}{2})$, (2 p.)
   (e) $\ln x - \ln(x+1) > 1$. (2 p.)

*Ratkaisu.*

(a) Epäyhtälö $(x-1)(2-3x) \geqslant -4$ on yhtäpitävä epäyhtälön $3x^2 - 5x - 2 \leqslant 0$ kanssa. Yhtälön $3x^2 - 5x - 2 = 0$ ratkaisut ovat $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = 2$ (+1 p.). Koska $3x^2 - 5x - 2$ on ylöspäin aukeava paraabeli, niin epäyhtälön $3x^2 - 5x - 2 \leqslant 0$ ratkaisu on $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2$ (+1 p.).

(b) $e^x = 2e^{-x} \overset{e^{-x}>0}{\iff} 2 = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^x e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$ (+1 p.) $\iff 2x = \ln 2 \iff x = \frac{\ln 2}{2}$ (+1 p.).

(c) $|2x-1| > |x+2| \iff (2x-1)^2 > (x+2)^2 \iff 4x^2 - 4x + 1 > x^2 + 4x + 4 \iff 3x^2 - 8x - 3 > 0$ (+1 p.). Yhtälön $3x^2 - 8x - 3 = 0$ ratkaisut ovat $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = 3$, joten koska $3x^2 - 8x - 3$ on ylöspäin aukeava paraabeli, niin epäyhtälön $3x^2 - 8x - 3 > 0$ ratkaisu on $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > 3$ (+1 p.).

(d) Koska $\sin(x+\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x+\pi))) = \cos(-\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ (+1 p.), niin yhtälön ratkaisuja ovat kaikki $x \in \mathbb{R}$ (+1 p.).

(e) Koska ln on aidosti kasvava funktio koko määrittelyjoukossaan eli silloin kun $x > 0$, niin $\ln x < \ln(x+1)$ (+1 p.). Näin ollen $\ln x - \ln(x+1) < 0$, joten epäyhtälöllä $\ln x - \ln(x+1) > 1$ ei ole ratkaisuja (+1 p.).

2. Määritä vakio $c$ niin, että funktion $f(x) = 2x^3 - 24x + c$ suurin arvo välillä $[1,3]$ on 12.

*Ratkaisu.* Koska $f$ on polynomifunktiona suljetulla välillä $[1,3]$ jatkuva ja avoimella välillä $(1,3)$ derivoituva, niin se saavuttaa välillä $[1,3]$ suurimman arvonsa derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Funktion $f$ derivaatta on $f'(x) = 6x^2 - 24 = 6(x^2-4)$ (+1 p.), jonka nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$. Näistä vain $x = 2$ on välillä $[1,3]$ (+1 p.). Jos funktion $f$ suurin arvo saavutettaisiin derivaatan nollakohdassa $x = 2$, niin

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2 + c = -32 + c = 12 \iff c = 44 \quad (+1 \text{ p.}).$$

Tällöin olisi $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1 + 44 = 22 > 12$, joten $f$ ei voi saavuttaa suurinta arvoaan 12 välillä $[1,3]$ derivaatan nollakohdassa $x = 2$ (+1 p.). Tutkitaan sitten välin $[1,3]$ alkupiste $x = 1$. Nyt

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1 + c = -22 + c = 12 \iff c = 34 \quad (+1 \text{ p.}),$$

jolloin $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2 + 34 = 2 < 12$, mutta $f(3) = 2 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3 + 36 = 18 > 12$ (+1 p.), joten $f$ ei voi saavuttaa suurinta arvoaan 12 välillä $[1,3]$ välin alkupisteessä $x = 1$ (+1 p.). Tutkitaan vielä välin $[1,3]$ päätepiste $x = 3$. Nyt

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3 + c = -18 + c = 12 \iff c = 30 \quad (+1 \text{ p.}),$$

jolloin $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1 + 30 = 8 < 12$ ja $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2 + 30 = -2 < 12$ (+1 p.). Näin ollen $c = 30$ (+1 p.).

3. Ympyrän kaksi jännettä leikkaavat toisensa. Leikkauspiste jakaa ympyrän jänteen osiin, joiden pituudet ovat 9 cm ja 10 cm, ja toisen jänteen suhteessa 2:5. Laske jälkimmäisen jänteen pituus.

*Ratkaisu.* Jos ei muuta oikein, niin kuvasta, jossa näkyvät jänteet ja niiden osat sekä pituudet ja suhteet, saa +2 p. (muuten nämä pisteet tulevat joka tapauksessa). Nyt

$$\frac{9}{2x} = \frac{5x}{10} \quad (+3 \text{ p.}) \iff 10x^2 = 90 \quad (+1 \text{ p.}) \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3 \quad (+1 \text{ p.}).$$

Näistä kelpaa vain $x = 3$ (+1 p.), joten jälkimmäisen jänteen pituus on $2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 6 + 15 = 21$ cm (+2 p.).

4. Määritä funktion $f(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x} + 2$, $x > 0$, se integraalifunktio $F$, joka on arvoiltaan positiivinen ja jonka kuvaajan, suorien $x = 1$ ja $x = 4$ sekä $x$-akselin rajaaman alueen pinta-ala on 81.

*Ratkaisu.* Nyt

$$F(x) = \int \left(\frac{15}{2}\sqrt{x} + 2\right) dx = \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x + C = 5x^{3/2} + 2x + C \quad (+3 \text{ p.}),$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \left(5x^{3/2} + 2x + C\right) dx &= \Big/_{1}^{4}\, 2x^{5/2} + x^2 + Cx \quad (+2 \text{ p.}) \\
&= 2 \cdot 4^{5/2} + 4^2 + 4C - (2 + 1 + C) \quad (+1 \text{ p.}) \\
&= 2 \cdot 16 \cdot 2 + 16 + 3C - 3 \quad (+1 \text{ p.}) \\
&= 77 + 3C = 81 \iff 3C = 4 \iff C = \frac{4}{3} \quad (+1 \text{ p.}).
\end{aligned}$$

Siis

$$F(x) = 5x^{3/2} + 2x + \frac{4}{3} \quad (+2 \text{ p.}).$$

5. Satunnaismuuttujalla $X$ on *diskreetti tasajakauma* arvojoukkonaan $\{1, 2, \ldots, n\}$, jos sen pistetodennäköisyydet ovat $p_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$ kaikilla $k \in 1, 2, \ldots, n$.
   (a) Johda diskreetin tasajakauman odotusarvo. (5 pistettä)
   (b) Anna esimerkki satunnaiskokeesta, joka noudattaa diskreettiä tasajakaumaa. Esitä tilanteeseen sopiva satunnaismuuttuja $X$ ja laske sen odotusarvo. (5 pistettä)

*Ratkaisu.*

(a) Odotusarvo on

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \quad (+5 \text{ p.}).$$

(b) Esimerkiksi yhden nopan heitto noudattaa diskreettiä tasajakaumaa arvojoukkonaan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (+2 p.). Tällöin sopiva satunnaismuuttuja on

$$X = \text{"nopanheiton tulos on } k\text{"}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (+2 \text{ p.}),$$

ja kohdan (a) perusteella

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \quad (+1 \text{ p.}).$$