Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma

Valintakoe 8.5.2019 klo 10.00–13.00

Kirjoita henkilö- ja yhteystietosi tekstaamalla.
Kirjoita nimesi latinalaisilla kirjaimilla (abcd...), älä esimerkiksi kyrillisillä kirjaimilla (абгд...).
Jos sinulla ei ole suomalaista henkilötunnusta, kirjoita sen asemesta syntymäaikasi.
Kirjoita henkilötiedot kaikille sivuille

Sukunimi	
Kaikki etunimet	
Henkilötunnus	
Sähköpostiosoite	
Puhelinnumero	

Tarkista sivunumeroiden avulla, että olet saanut kaikki sivut.

Kirjoita alla olevaan laatikkoon nimikirjoituksesi merkkinä siitä, että olet tarkistanut edellä mainitut asiat.

Nimikirjoitus	

Jos haluat, että tehtäviin kirjoittamasi vastaukset arvostellaan, jätä alla oleva laatikko tyhjäksi.

Jos haluat, että tehtäviin kirjoittamiasi vastauksia ei arvostella, kirjoita alla olevaan laatikkoon teksti "*Haluan, että vastauksiani ei arvostella*". Tässä tapauksessa saat vastauksistasi nolla pistettä.

Arvostelusta luopuminen	

Lue huolellisesti kaikki ohjeet läpi

- Tarkista, että saamassasi koenipussa on kansilehden ja ohjesivujen (sivut 1–2) lisäksi:
  - kysymys- ja vastausosio (sivut 3–8)
  - yksi ruutupaperiarkki omia muistiinpanoja varten (konseptipaperi).

- Tehtävien vastaukset kirjoitetaan kysymys- ja vastausosioon.

- **Tarkista, että olet kirjoittanut nimesi ja henkilötunnuksesi kaikkiin vastauslomakkeisiin.**

- Kirjoita vastauksesi
  - suomeksi tai ruotsiksi. Muilla kielillä kirjoitettuja vastauksia ei huomioida arvostelussa.
  - koemonisteelle. Kirjoita kukin vastaus kyseisen kysymyksen alle. Voit tarvittaessa jatkaa minkä tahansa tehtävän vastausta sivulle 8.
  - lyijykynällä ja selvällä käsialalla. Arvostelija tulkitsee tulkinnanvaraiset merkinnät vähiten pisteitä tuottavan vaihtoehdon mukaisesti.

- Älä kirjoita vaihtoehtoisia vastauksia. Jos kirjoitat vaihtoehtoisia vastauksia, arvostelussa huomioidaan vain vastaus, josta saat vähiten pisteitä.

- Voit luonnostella vastauksiasi ruutupaperille. Ruutupaperille tekemiäsi merkintöjä ei huomioida arvostelussa. Olet saanut yhden arkin ruutupaperia. Voit tarvittaessa pyytää lisää ruutupaperia valvojalta.

- Pidä koemateriaalisi niin, että lähelläsi istuvat hakijat eivät pysty katsomaan vastauksiasi ja merkintöjäsi.

Pisteyttäminen

Valintakoe pisteytetään asteikolla 0–50. Tehtäväkohtaiset pisteet on ilmoitettu kunkin tehtävän kohdalla.

Valintakoekirjallisuus

Valintakokeen tehtävät perustuvat lukion matematiikan pitkään oppimäärään (9 kurssia, lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 mukaisesti).

Kun aiot palauttaa koepaperit

Muista kirjoittaa koepaperinipun kansilehdelle allekirjoituksesi, sekä nimesi kaikille pyydetyille sivuille. Kun lähdet palauttamaan koepapereita, ota mukaasi kaikki tavarat istumapaikaltasi. Palauta kaikki saamasi paperit, myös suttupaperit, vaikket olisikaan tehnyt joitakin tehtäviä tai mitään tehtäviä. Todista henkilöllisyytesi, kun palautat paperit. Kokeen valvoja merkitsee kokeeseen osallistumisen ja koepapereiden palautuksen osallistujalistaan. Tarvittaessa saat kokeen valvojalta erillisen todistuksen valintakokeeseen osallistumisesta.

Tehtävä 1 (10 pistettä)

Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.

(a) $(x-1)(2-3x) \geq -4$, (2 pistettä)
(b) $e^x = 2e^{-x}$, (2 pistettä)
(c) $|2x-1| > |x+2|$, (2 pistettä)
(d) $\sin(x+\pi) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, (2 pistettä)
(e) $\ln x - \ln(x+1) > 1$. (2 pistettä)

Tehtävä 2 (10 pistettä)

Määritä vakio c niin, että funktion $f(x) = 2x^3 - 24x + c$ suurin arvo välillä $[1,3]$ on 12.

Tehtävä 3 (10 pistettä)

Ympyrän kaksi jännettä leikkaavat toisensa. Leikkauspiste jakaa ympyrän jänteen osiin, joiden pituudet ovat 9 cm ja 10 cm, ja toisen jänteen suhteessa 2:5. Laske jälkimmäisen jänteen pituus.

Tehtävä 4 (10 pistettä)

Määritä funktion $f(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x} + 2$, $x > 0$, se integraalifunktio F, joka on arvoiltaan positiivinen ja jonka kuvaajan, suorien $x = 1$ ja $x = 4$ sekä x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on 81.

Tehtävä 5 (10 pistettä)

Satunnaismuuttujalla X on *diskreetti tasajakauma* arvojoukkonaan $\{1,2,\ldots,n\}$, jos sen pistetodennäköisyydet ovat $p_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$ kaikilla $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(a) Johda diskreetin tasajakauman odotusarvo. (5 pistettä)

(b) Anna esimerkki satunnaiskokeesta, joka noudattaa diskreettiä tasajakaumaa. Esitä tilanteeseen sopiva satunnaismuuttuja X ja laske sen odotusarvo. (5 pistettä)

Helsingin yliopisto
Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma
Valintakoe 8.5.2019 klo 10.00–13.00 – Ratkaisut ja pisteytys

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.
   (a) $(x-1)(2-3x) \geqslant -4$, (2 p.)
   (b) $e^x = 2e^{-x}$, (2 p.)
   (c) $|2x-1| > |x+2|$, (2 p.)
   (d) $\sin(x+\pi) = \cos(x+\frac{\pi}{2})$, (2 p.)
   (e) $\ln x - \ln(x+1) > 1$. (2 p.)

Ratkaisu.

(a) Epäyhtälö $(x-1)(2-3x) \geqslant -4$ on yhtäpitävä epäyhtälön $3x^2 - 5x - 2 \leqslant 0$ kanssa. Yhtälön $3x^2 - 5x - 2 = 0$ ratkaisut ovat $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = 2$ (+1 p.). Koska $3x^2 - 5x - 2$ on ylöspäin aukeava paraabeli, niin epäyhtälön $3x^2 - 5x - 2 \leqslant 0$ ratkaisu on $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2$ (+1 p.).

(b) $e^x = 2e^{-x} \overset{e^{-x}>0}{\iff} 2 = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^x e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$ (+1 p.) $\iff 2x = \ln 2 \iff x = \frac{\ln 2}{2}$ (+1 p.).

(c) $|2x-1| > |x+2| \iff (2x-1)^2 > (x+2)^2 \iff 4x^2 - 4x + 1 > x^2 + 4x + 4 \iff 3x^2 - 8x - 3 > 0$ (+1 p.). Yhtälön $3x^2 - 8x - 3 = 0$ ratkaisut ovat $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = 3$, joten koska $3x^2 - 8x - 3$ on ylöspäin aukeava paraabeli, niin epäyhtälön $3x^2 - 8x - 3 > 0$ ratkaisu on $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > 3$ (+1 p.).

(d) Koska $\sin(x+\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x+\pi))) = \cos(-\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ (+1 p.), niin yhtälön ratkaisuja ovat kaikki $x \in \mathbb{R}$ (+1 p.).

(e) Koska ln on aidosti kasvava funktio koko määrittelyjoukossaan eli silloin kun $x > 0$, niin $\ln x < \ln(x+1)$ (+1 p.). Näin ollen $\ln x - \ln(x+1) < 0$, joten epäyhtälöllä $\ln x - \ln(x+1) > 1$ ei ole ratkaisuja (+1 p.).

2. Määritä vakio c niin, että funktion $f(x) = 2x^3 - 24x + c$ suurin arvo välillä $[1,3]$ on 12.

Ratkaisu. Koska f on polynomifunktiona suljetulla välillä $[1,3]$ jatkuva ja avoimella välillä $(1,3)$ derivoituva, niin se saavuttaa välillä $[1,3]$ suurimman arvonsa derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Funktion f derivaatta on $f'(x) = 6x^2 - 24 = 6(x^2-4)$ (+1 p.), jonka nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$. Näistä vain $x = 2$ on välillä $[1,3]$ (+1 p.). Jos funktion f suurin arvo saavutettaisiin derivaatan nollakohdassa $x = 2$, niin

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2 + c = -32 + c = 12 \iff c = 44 \quad (+1 \text{ p.}).$$

Tällöin olisi $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1 + 44 = 22 > 12$, joten f ei voi saavuttaa suurinta arvoaan 12 välillä $[1,3]$ derivaatan nollakohdassa $x = 2$ (+1 p.). Tutkitaan sitten välin $[1,3]$ alkupiste $x = 1$. Nyt

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1 + c = -22 + c = 12 \iff c = 34 \quad (+1 \text{ p.}),$$

jolloin $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2 + 34 = 2 < 12$, mutta $f(3) = 2 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3 + 36 = 18 > 12$ (+1 p.), joten f ei voi saavuttaa suurinta arvoaan 12 välillä $[1,3]$ välin alkupisteessä $x = 1$ (+1 p.). Tutkitaan vielä välin $[1,3]$ päätepiste $x = 3$. Nyt

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3 + c = -18 + c = 12 \iff c = 30 \quad (+1 \text{ p.}),$$

jolloin $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1 + 30 = 8 < 12$ ja $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2 + 30 = -2 < 12$ (+1 p.). Näin ollen $c = 30$ (+1 p.).

3. Ympyrän kaksi jännettä leikkaavat toisensa. Leikkauspiste jakaa ympyrän jänteen osiin, joiden pituudet ovat 9 cm ja 10 cm, ja toisen jänteen suhteessa 2:5. Laske jälkimmäisen jänteen pituus.

Ratkaisu. Jos ei muuta oikein, niin kuvasta, jossa näkyvät jänteet ja niiden osat sekä pituudet ja suhteet, saa +2 p. (muuten nämä pisteet tulevat joka tapauksessa). Nyt

$$\frac{9}{2x} = \frac{5x}{10} \quad (+3 \text{ p.}) \iff 10x^2 = 90 \quad (+1 \text{ p.}) \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3 \quad (+1 \text{ p.}).$$

Näistä kelpaa vain $x = 3$ (+1 p.), joten jälkimmäisen jänteen pituus on $2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 6 + 15 = 21$ cm (+2 p.).

4. Määritä funktion $f(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x} + 2$, $x > 0$, se integraalifunktio F, joka on arvoiltaan positiivinen ja jonka kuvaajan, suorien $x = 1$ ja $x = 4$ sekä x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on 81.

Ratkaisu. Nyt

$$F(x) = \int \left(\frac{15}{2}\sqrt{x} + 2\right) dx = \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x + C = 5x^{3/2} + 2x + C \quad (+3 \text{ p.}),$$

joten

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(5x^{3/2} + 2x + C\right) dx &= \Big/_1^4\, 2x^{5/2} + x^2 + Cx \quad (+2 \text{ p.})\\ &= 2 \cdot 4^{5/2} + 4^2 + 4C - (2 + 1 + C) \quad (+1 \text{ p.})\\ &= 2 \cdot 16 \cdot 2 + 16 + 3C - 3 \quad (+1 \text{ p.})\\ &= 77 + 3C = 81 \iff 3C = 4 \iff C = \frac{4}{3} \quad (+1 \text{ p.}).\end{aligned}$$

Siis

$$F(x) = 5x^{3/2} + 2x + \frac{4}{3} \quad (+2 \text{ p.}).$$

5. Satunnaismuuttujalla X on *diskreetti tasajakauma* arvojoukkonaan $\{1, 2, \ldots, n\}$, jos sen pistetodennäköisyydet ovat $p_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$ kaikilla $k \in 1, 2, \ldots, n$.
   (a) Johda diskreetin tasajakauman odotusarvo. (5 pistettä)
   (b) Anna esimerkki satunnaiskokeesta, joka noudattaa diskreettiä tasajakaumaa. Esitä tilanteeseen sopiva satunnaismuuttuja X ja laske sen odotusarvo. (5 pistettä)

Ratkaisu.

(a) Odotusarvo on

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \quad (+5 \text{ p.}).$$

(b) Esimerkiksi yhden nopan heitto noudattaa diskreettiä tasajakaumaa arvojoukkonaan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (+2 p.). Tällöin sopiva satunnaismuuttuja on

$$X = \text{"nopanheiton tulos on } k\text{"}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (+2 \text{ p.}),$$

ja kohdan (a) perusteella

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \quad (+1 \text{ p.}).$$