Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma

Valintakoe 7.5.2018 klo 10.00–13.00

Kirjoita henkilö- ja yhteystietosi tekstaamalla.

Kirjoita nimesi latinalaisilla kirjaimilla (abcd...), älä esimerkiksi kyrillisillä kirjaimilla (абгд...).

Jos sinulla ei ole suomalaista henkilötunnusta, kirjoita sen asemesta syntymäaikasi.

Kirjoita henkilötiedot kaikille sivuille

Sukunimi	
Kaikki etunimet	
Henkilötunnus	
Sähköpostiosoite	
Puhelinnumero	

Tarkista sivunumeroiden avulla, että olet saanut kaikki sivut.

Kirjoita alla olevaan laatikkoon nimikirjoituksesi merkkinä siitä, että olet tarkistanut edellä mainitut asiat.

Nimikirjoitus	

Jos haluat, että tehtäviin kirjoittamasi vastaukset arvostellaan, jätä alla oleva laatikko tyhjäksi.

Jos haluat, että tehtäviin kirjoittamiasi vastauksia ei arvostella, kirjoita alla olevaan laatikkoon teksti "*Haluan, että vastauksiani ei arvostella*". Tässä tapauksessa saat vastauksistasi nolla pistettä.

Arvostelusta luopuminen	

WC

Lue huolellisesti kaikki ohjeet läpi

- Tarkista, että saamassasi koenipussa on kansilehden ja ohjesivujen (sivut 1–4) lisäksi:
  - kysymys- ja vastausosio (sivut 5–9)
  - yksi ruutupaperiarkki omia muistiinpanoja varten (konseptipaperi).
- Tehtävien vastaukset kirjoitetaan kysymys- ja vastausosioon.
- **Tarkista, että olet kirjoittanut nimesi ja henkilötunnuksesi kaikkiin vastauslomakkeisiin.**
- Kirjoita vastauksesi
  - suomeksi tai ruotsiksi. Muilla kielillä kirjoitettuja vastauksia ei huomioida arvostelussa.
  - koemonisteelle. Kirjoita kukin vastaus sille varattuun tilaan. Arvostelija ei huomioi merkintöjä, jotka ovat vastaukselle varatun tilan ulkopuolella.
  - lyijykynällä ja selvällä käsialalla. Arvostelija tulkitsee tulkinnanvaraiset merkinnät vähiten pisteitä tuottavan vaihtoehdon mukaisesti.
- Älä kirjoita vaihtoehtoisia vastauksia. Jos kirjoitat vaihtoehtoisia vastauksia, arvostelussa huomioidaan vain vastaus, josta saat vähiten pisteitä.
- Voit luonnostella vastauksiasi ruutupaperille. Ruutupaperille tekemiäsi merkintöjä ei huomioida arvostelussa. Olet saanut yhden arkin ruutupaperia. Voit tarvittaessa pyytää lisää ruutupaperia valvojalta.
- Pidä koemateriaalisi niin, että lähelläsi istuvat hakijat eivät pysty katsomaan vastauksiasi ja merkintöjäsi.

Pisteyttäminen

Valintakoe pisteytetään asteikolla 0–50. Tehtäväkohtaiset pisteet on ilmoitettu kunkin tehtävän kohdalla.

Valintakoekirjallisuus

Valintakokeen tehtävät perustuvat lukion matematiikan pitkään oppimäärään (9 kurssia, lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 mukaisesti).

Jos haluat valvojan huomion

Jos haluat valvojan huomion, niin nosta kätesi. Valvoja tulee luoksesi. Kerro asiasi valvojalle hiljaisella äänellä.

Jos haluat käydä vessassa

Voit käydä vessassa valvojan saattamana. Valvoja saattaa vessaan vain yhden kokelaan kerrallaan.

Useimpien koesalien läheisyydessä on vain kaksijakoisen sukupuolijärjestelmän mukaisia vessoja. Tämän vuoksi sinua vessaan saattavan valvojan on oltava miespuolinen, jos haluat käydä miehille tarkoitetussa vessassa, ja naispuolinen, jos haluat käydä naisille tarkoitetussa vessassa.

Jos haluat käydä vessassa, toimi seuraavasti:

1. Tarkista, että koesalissa on vähintään kaksi valvojaa ja että vähintään yksi valvojista on sellainen, joka voi saattaa sinut vessaan. Jos nämä ehdot eivät täyty, odota, että tilanne muuttuu.

2. Käännä esiin tämän kansilehti- ja ohjesivunipun sivu 2, jossa on isolla fontilla merkintä WC, ja nosta sitten nippu pystyyn teksti itsestäsi poispäin siten, että valvoja huomaa sinut ja tulee luoksesi. Odota kärsivällisesti. Valvoja ei välttämättä voi saattaa sinua vessaan heti. Valvoja ei myöskään välttämättä vie kokelaita vessaan samassa järjestyksessä, jossa kokelaat ilmoittivat tarpeestaan käydä vessassa.

3. Kun valvoja antaa sinulle merkin, kerää koepaperisi konseptiarkin sisälle ja jätä nippu pöydälle ja seuraa valvojaa vessaan.

Kun aiot palauttaa koepaperit

Kun aiot palauttaa koepaperit, järjestä paperit konseptiarkin sisälle samaan järjestykseen, jossa paperit sait.

Kun lähdet palauttamaan koepapereita, ota mukaasi kaikki tavarat, jotka olet istumapaikalle vienyt, jotta sinun ei tarvitsisi palata noutamaan kyseisiä tavaroita.

Palauta kaikki saamasi koepaperit, myös suttupaperit, salin etuosassa olevalle valvojalle.

Palauta kaikki paperit, vaikket olisikaan tehnyt joitakin tehtäviä tai mitään tehtäviä. Todista henkilöllisyytesi, kun palautat paperit. Muista koepaperinipun kansilehden allekirjoitus. Kokeeseen osallistuminen ja koepapereiden palautus merkitään palautuksen yhteydessä osallistujalistaan kokeen valvojan toimesta. Tarvittaessa saat kokeen valvojalta erillisen todistuksen valintakokeeseen osallistumisesta.

Tehtävä 1

Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.

(a) $-(x + 1)(-3 + 2x) \leq 0$, (2 pistettä)
(b) $2e^{x} = e^{2x}$, (2 pistettä)
(c) $-|x - 3| > -|x + 2|$, (2 pistettä)
(d) $\sin(3x + \pi) = -1$, (2 pistettä)
(e) $2(x + 2)^{2/3} \leq 8$. (2 pistettä)

Tehtävä 2

Suorakulmion kärki on origossa ja kaksi sivua ovat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Yksi kärjistä on suoralla $y = -3x + 120$.

(a) Määritä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala. (5 pistettä)
(b) Missä pisteissä sijaitsevat sellaisten ehdot täyttävien suorakulmioiden kärjet, joiden pinta-ala on puolet suurimman mahdollisen suorakulmion pinta-alasta? (5 pistettä)

Tehtävä 3

Heitetään viisi tavallista noppaa, joissa on silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6.

(a) Mikä on todennäköisyys, että kaikkiin noppiin saadaan sama silmäluku? (4 pistettä)
(b) Mikä on todennäköisyys, että kaikkiin noppiin saadaan eri silmäluku? (4 pistettä)
(c) Mikä on todennäköisyys, että vähintään kahdessa nopassa on sama silmäluku? (2 pistettä)

Tehtävä 4

Taso kulkee pisteen $(0,1,-2)$ kautta ja sen normaalivektori on $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.

(a) Missä pisteessä taso leikkaa y-akselin? (5 pistettä)
(b) Laske tason etäisyys origosta. (5 pistettä)

Tehtävä 5

Väliarvolause. Jos jatkuva funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin on olemassa sellainen piste $z \in]a, b[$, että $f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(a) Etsi väliarvolauseessa esiintyvä piste $z \in]-1{,}2[$ funktiolle $f\colon [-1{,}2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. (5 pistettä)

(b) Löytyykö funktiolle $g\colon [-1{,}2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, pistettä $z \in]-1{,}2[$, jolle $g'(z) = \frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}$? Miksi havaintosi ei ole ristiriidassa väliarvolauseen kanssa? (5 pistettä)

Helsingin yliopisto
Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma
Valintakoe 7.5.2018 – Ratkaisut ja pisteytys

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.
   (a) $-(x+1)(-3+2x) \leqslant 0$, (2 p.)
   (b) $2e^x = e^{2x}$, (2 p.)
   (c) $-|x-3| > -|x+2|$, (2 p.)
   (d) $\sin(3x+\pi) = -1$, (2 p.)
   (e) $2(x+2)^{2/3} \leqslant 8$. (2 p.)

Ratkaisu.

(a) Yhtälön $-(x+1)(-3+2x) = 0$ ratkaisut ovat $x = -1$ ja $x = \frac{3}{2}$ (+1 p.). Koska $-(x+1)(-3+2x) = -2x^2 + x + 3$ on alaspäin aukeava paraabeli, niin epäyhtälön $-(x+1)(-3+2x) \leqslant 0$ ratkaisu on $x \leqslant -1$ tai $x \geqslant \frac{3}{2}$ (+1 p.).

(b) $2e^x = e^{2x} \overset{e^x>0}{\iff} 2 = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$ (+1 p.) $\iff x = \ln 2$ (+1 p.).

(c) $-|x-3| > -|x+2| \iff |x-3| < |x+2| \iff (x-3)^2 < (x+2)^2 \iff x^2-6x+9 < x^2+4x+4$ (+1 p.) $\iff -6x+9 < 4x+4 \iff 10x > 5 \iff x > \frac{1}{2}$ (+1 p.).

(d) $\sin(3x+\pi) = -1 \iff 3x+\pi = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) (+1 p.) $\iff 3x = -\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \iff x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ (+1 p.). Yhtä hyvin ratkaisuksi kelpaa $\sin(3x+\pi) = -1 \iff 3x+\pi = -\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) (+1 p.) $\iff 3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ (+1 p.).

(e) Epäyhtälö on määritelty, kun $x+2 > 0$ eli kun $x > -2$. $2(x+2)^{2/3} \leqslant 8 \iff (x+2)^{2/3} \leqslant 4 \iff \left((x+2)^{2/3}\right)^{3/2} \leqslant 4^{3/2} \iff x+2 \leqslant (2^2)^{3/2} = 2^3 = 8 \iff x \leqslant 6$ (+1 p.). Näin ollen epäyhtälö toteutuu, kun $-2 < x \leqslant 6$ (+1 p.).

2. Suorakulmion kärki on origossa ja kaksi sivua ovat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Yksi kärjistä on suoralla $y = -3x + 120$.
   (a) Määritä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala. (5 p.)
   (b) Missä pisteissä sijaitsevat sellaisten ehdot täyttävien suorakulmioiden kärjet, joiden pinta-ala on puolet suurimman mahdollisen suorakulmion pinta-alasta? (5 p.)

Ratkaisu.

(a) Merkitään suorakulmion suoralla $y = -3x + 120$ olevaa kärkeä (x, y), jolloin $x, y > 0$. Tällöin suorakulmion pinta-ala on

$$A(x) = xy = x(-3x+120) = -3x^2 + 120 \quad (+1 \text{ p.}).$$

Koska A:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli (+1 p.) ja

$$A'(x) = -6x + 120 = 0 \quad (+1 \text{ p.}) \iff x = \frac{120}{6} = 20 \quad (+1 \text{ p.}),$$

niin suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on

$$A(20) = -3 \cdot 20^2 + 120 \cdot 20 = -1200 + 2400 = 1200 \quad (+1 \text{ p.}).$$

(b) Ehdot täyttävät suorakulmiot toteuttavat yhtälön

$$B(x) = xy = x(-3x + 120) = -3x^2 + 120 = \frac{A(20)}{2} = \frac{1200}{2} = 600 \quad (+1 \text{ p.})$$

$$\iff 3x^2 - 120x + 600 = 0$$

$$\iff x^2 - 40x + 200 = 0 \quad (+1 \text{ p.})$$

$$\iff x = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200}}{2} = 20 \pm \frac{\sqrt{800}}{2} = 20 \pm 10\sqrt{2} \quad (+1 \text{ p.}).$$

Näitä vastaavat y-akselin pisteet ovat

$$y = -3x + 120 = -3(20 \pm 10\sqrt{2}) = -60 \mp 30\sqrt{2} + 120 = 60 \mp 30\sqrt{2},$$

joten kysytyt pisteet ovat $(20 + 10\sqrt{2}, 60 - 30\sqrt{2})$ (+1 p.), jolloin suorakulmion muut kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(20 + 10\sqrt{2}, 0)$ ja $(0, 60 - 30\sqrt{2})$, sekä $(20 - 10\sqrt{2}, 60+30\sqrt{2})$ (+1 p.), jolloin suorakulmion muut kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(20 - 10\sqrt{2}, 0)$ ja $(0, 60 + 30\sqrt{2})$.

3. Heitetään viisi tavallista noppaa, joissa on silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   (a) Mikä on todennäköisyys, että kaikkiin noppiin saadaan sama silmäluku? (4 p.)
   (b) Mikä on todennäköisyys, että kaikkiin noppiin saadaan eri silmäluku? (4 p.)
   (c) Mikä on todennäköisyys, että vähintään kahdessa nopassa on sama silmäluku? (2 p.)

Ratkaisu.

(a) $P(\text{"kaikissa sama"}) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$ (+2+1+1 p.).

(b) $P(\text{"kaikissa eri"}) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5}{54}$ (+2+1+1 p.).

(c) $P(\text{"vähintään kahdessa sama"}) = 1 - P(\text{"kaikissa eri"}) = 1 - \frac{5}{54} = \frac{49}{54}$ (+1+1 p.).

4. Taso kulkee pisteen $(0, 1, -2)$ kautta ja sen normaalivektori on $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.
   (a) Missä pisteessä taso leikkaa y-akselin? (5 p.)
   (b) Laske tason etäisyys origosta. (5 p.)

Ratkaisu.

(a) Tason yhtälö on

$$4 \cdot (x - 0) + 5 \cdot (y - 1) - 6 \cdot (z - (-2)) = 0 \quad (+1 \text{ p.})$$

$$\iff 4x + 5y - 6z - 17 = 0 \quad (+1 \text{ p.}).$$

Taso leikkaa y-akselin pisteessä, jossa $x = 0$ ja $z = 0$, jolloin

$$4 \cdot 0 + 5y - 6 \cdot 0 - 17 = 0 \quad (+1 \text{ p.}) \iff 5y = 17 \iff y = \frac{17}{5} \quad (+1 \text{ p.}).$$

Näin ollen taso leikkaa y-akselin pisteessä $(0, \frac{17}{5}, 0)$ (+1 p.).

(b) Origon $(0, 0, 0)$ etäisyys tasosta $4x + 5y - 6z - 17 = 0$ on

$$\frac{|4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 17|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + (-6)^2}} \quad (+1+1+1 \text{ p.})$$

$$= \frac{17}{\sqrt{16 + 25 + 36}} = \frac{17}{\sqrt{77}} \quad (+1+1 \text{ p.}).$$

5. **Väliarvolause.** Jos jatkuva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva avoimella välillä $]a,b[$, niin on olemassa sellainen piste $z \in\,]a,b[$, että $f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   (a) Etsi väliarvolauseessa esiintyvä piste $z \in\,]-1,2[$ funktiolle $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. (5 p.)
   (b) Löytyykö funktiolle $g\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, pistettä $z \in\,]-1,2[$, jolle $g'(z) = \frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}$? Miksi havaintosi ei ole ristiriidassa väliarvolauseen kanssa? (5 p.)

Ratkaisu.

(a) Koska $f'(x) = 2x$ (+1 p.), niin saadaan

$$2z = f'(z) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2^2-(-1)^2}{3} = \frac{4-1}{3} = 1 \quad \text{(+1+1+1 p.)},$$

joten $z = \dfrac{1}{2}$ (+1 p.).

(b) Nyt

$$g'(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 2, \end{cases} \qquad \text{(+1 p.)}$$

ja g ei ole derivoituva origossa (+1 p.), mutta

$$\frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{(+1 p.)},$$

joten ei ole olemassa sellaista pistettä $z \in\,]-1,2[$, jolle $g'(z) = \frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}$ (+1 p.). Havainto ei ole ristiriidassa väliarvolauseen kanssa, koska siinä vaatimuksena on funktion derivoituvuus koko avoimella välillä $]a,b[$, mutta g ei ole derivoituva pisteessä $0 \in\,]-1,2[$ (+1 p.).